Solution to the Generalized Bankruptcy Problem

Semyon Yurkov
Alexander Karpov

International Centre of Decision Choice and Analysis (DeCAn)
Research Seminar
28.06.2012 Higher School of Economics (HSE), Moscow

Legend:
In red established definitions and results.
In green new definitions and results.

Класс проблем банкротства $\mathcal{C}^n$

$\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ - множество игроков. $1 < |\mathcal{N}| := n < \infty$.

$E_0 \in \mathbb{R}_+$ - сумма денег на рассмотрение.

$c \in \mathbb{R}_+^n$ - вектор долгов.

Проблема банкротства это пара (E_0, c) такая, что выполнено $\sum_{i \in \mathcal{N}} c_i > E_0$.

Правило дележа это функция $f: \mathcal{C}^n \to \mathbb{R}_+^n$ для которой выполнено $\sum_{i \in \mathcal{N}} f_i \leq E_0$.

Примеры правил.

$$P_i := \frac{c_i}{\sum_{k \in \mathcal{N}} c_k} E_0$$

$$CEA_i := \min\{c_i, \lambda\}, \sum_{i \in \mathcal{N}} CEA_i = E_0$$

Примеры свойств правил.

Непрерывность $\left(E_0^k, c^k\right) \to (E_0, c) \Rightarrow f\left(E_0^k, c^k\right) \to f(E_0, c)$

Неманипулируемость $\forall\, \mathcal{N}' \subset \mathcal{N}, \forall\, (c_i')_{i \in \mathcal{N}'} \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{N}'|}$:

$$\sum_{i \in \mathcal{N}'} c_i = \sum_{i \in \mathcal{N}'} c_i' \Rightarrow \sum_{i \in \mathcal{N}'} f_i(E_0, c) = \sum_{i \in \mathcal{N}'} f_i(E_0, (c_i')_{i \in \mathcal{N}'}, c_{\mathcal{N} \setminus \mathcal{N}'})$$

Пример интересного утверждения

(Неманипулируемость) $\Leftrightarrow f$ – обобщенное правило P (Ю, Миягава, Сакай, 2007)

Класс проблем банкротства со связями $\mathcal{L}^n$

$E \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ - вектор собственных капиталов агентов, нулевая координата которого E_0.

$c \in \mathbb{R}_+^n$ - вектор долгов банкрота 0 остальным агентам.

$c_{ij} \in \mathbb{R}_+$ - долг агента i агенту j, тогда

$C \coloneqq \{c_{ij} | i, j \in \mathcal{N}, c_{ii} = 0\}$ - матрица долговых связей между кредиторами.

Проблема банкротства со связями это тройка (E, c, C) для которой выполнены условия

$$(E_0, c) \in C^n$$

$$E_i + c_i + \sum_{k \in \mathcal{N}} c_{ki} \geq \sum_{k \in \mathcal{N}} c_{ik} \quad \forall\, i \in \mathcal{N}$$

Баланс агента i это сумма денег, которая была бы у него, если бы 0 не обанкротился

$$B_i := E_i + c_i + \sum\nolimits_{k \in \mathcal{N}} c_{ki} - \sum\nolimits_{k \in \mathcal{N}} c_{ik} \geq 0$$

Взаимозачет долгов

После дележа капитала банкрота E_0 агент i в конечном счете имеет

$$\Delta_i := E_i + f_i + \sum_{k\in\mathcal{N}} c_{ki} - \sum_{k\in\mathcal{N}} c_{ki}.$$

Если $\Delta_i < 0$, то он тоже банкрот и его собственный капитал $E_i + f_i$ распределяется между другими агентами.

Теорема. Для пропорционального правила P и задачи $(E, c, C) \in \mathcal{L}^n$ всегда найдется взаимозачет долгов такой, что

1. Баланс каждого агента B_i не изменится;
2. Дальнейших банкротств не будет, то есть выполнено $\Delta_i \geq 0 \ \ \forall i \in \mathcal{N}$.

Проблема. Способ поиска взаимозачета уникален для каждого правила, а для некоторых, возможно, отсутствует.

Цель. Найти справедливое правило дележа для любой задачи банкротства со связями.

Подход. Кооперативные игры.

Кооперативные TU-игры

Кооперативная TU-игра это пара $(\mathcal{N}, v)$, где $v: 2^{\mathcal{N}} \to \mathbb{R}$ и $v(\emptyset) = 0$.
Если $S \subset \mathcal{N}$, то $v(S)$ – выгода, которую могут достичь члены коалиции S.

Распределение выигрышей это вектор $x \in \mathbb{R}^n$.
Выигрыш коалиции $x(S) \coloneqq \sum_{i \in S} x_i$.

Множество пред-дележей:

$$PI(\mathcal{N}, v) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n | x(\mathcal{N}) = v(\mathcal{N})\}$$

Решение игры это (многозначное) отображение $\sigma(\mathcal{N}, v) \subset \mathbb{R}^n$. Существуют разные концепции решения игры: core, least-core, strong epsilon-core, nucleolus, prenucleolus, kernel, prekernel, shapley value, stable set итд.

***C* –ядро** это множество индивидуально и коллективно-рациональных пред-дележей

$$C(\mathcal{N}, v) \coloneqq \{x \in PI(\mathcal{N}, v) | x(S) \geq v(S)\ \forall S \subset \mathcal{N}\}$$

Замечание: C – ядро существует не для всех игр, т.е. может быть пусто.

Банкрот/не банкрот

Имущество банкрота E_0 поделено между агентами и каждый получил f_i. Агент i обладает суммой $\Delta_i = E_i + f_i + \sum_{k\in\mathcal{N}} c_{ki} - \sum_{k\in\mathcal{N}} c_{ki}$.

Игра "банкрот/не банкрот"

$$v_{\pm}(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum\limits_{i\in S} \Delta_i \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Объединяясь в коалицию агенты увеличивают суммарный собственный капитал, выплаты со стороны 0, и долги им со стороны внешнего мира, но и долг во внешний мир возрастает.

Утверждение. Всегда $C(\mathcal{N}, v_{\pm}) = \emptyset$.

Проблема. После дележа E_0 агенты никогда не придут к компромиссу.

Причина. Мы допустили время. Два периода: дележ E_0 → расчет по долгам.

Решение. Проводить дележ E_0 сразу с учетом долговых связей между кредиторами.

Игра, ассоциированная с $(E, c, C) \in \mathcal{L}^n$

Поведение коалиции S.

Игроки коалиции объединяются собственными капиталами, “захватывают” капитал банкрота E_0, агентов остального мира обеспечивают их чистыми долговыми балансами: $\sum_{i \in \mathcal{N} \setminus S}(c_i + \sum_{k \in \mathcal{N}} c_{ki} - \sum_{k \in \mathcal{N}} c_{ik})$. Если этого сделать не получается, то остаются ни с чем. Обозначив $(a)_+ := \max\{a, 0\}$ приходим к **определению** $(\mathcal{N}, v_{\mathcal{L}})$

$$v_{\mathcal{L}}(S) := \left(\sum_{i \in S} E_i + E_0 - \sum_{i \in \mathcal{N} \setminus S}(c_i + \sum_{k \in \mathcal{N}} c_{ki} - \sum_{k \in \mathcal{N}} c_{ik})\right)_+.$$

Утверждение. $(\mathcal{N}, v_{\mathcal{L}})$ выпукла: $\forall\, A, B \subset \mathcal{N}$ выполнено

$$v_{\mathcal{L}}(A) + v_{\mathcal{L}}(B) \le v_{\mathcal{L}}(A \cap B) + v_{\mathcal{L}}(A \cup B)$$

Следствие. Всегда $C(\mathcal{N}, v_{\mathcal{L}}) \neq \emptyset$.

Проблема. C -ядро может состоять из континуума распределений.

Решение. Пред-N –ядро $PN(\mathcal{N}, v)$!

Причина. Для любой игры $|PN(\mathcal{N}, v)| = 1$.

Пред-N -ядро

Эксцесс коалиции $e(S, x, v) = v(S) - x(S)$.

Эксцесс это мера неудовлетворенности коалиции предложенным решением x.

Вектор эксцессов $\theta_x(\mathcal{N}, v) \in \mathbb{R}^{2^n}$ состоит из эксцессов всех коалиций, упорядоченных по убыванию.

Пред-N –ядро состоит из тех пред-дележей, для которых эксцесс самой неудовлетворенной коалиции минимален

$$x \in PN(\mathcal{N}, v) \Leftrightarrow \theta_x \leq_{lex} \theta_y \; \forall y \in PI(\mathcal{N}, v)$$

Замечание. Пред-N –ядро всегда непусто, состоит из единственного вектора и лежит в C – ядре (если оно существует).

Проблема. Не получится ли так, что в пред-N –ядре кто-то получит больше, чем заслуживает, больше, чем B_i?

Решение. Теоремы Соболева (1975) и Оршана (1993) о единственном одноточечном согласованном решении.

Согласованное решение кооперативной игры

Макс-редуцированная игра $r^x_{\mathcal{N}'}(v)$ на коалицию $\mathcal{N}'$ для распределения x

$$r^x_{\mathcal{N}'}(v)(T) = \begin{cases} v(\mathcal{N}) - v(\mathcal{N}\backslash\mathcal{N}'), & T = \mathcal{N}' \\ \max\limits_{Q\subseteq\mathcal{N}\backslash\mathcal{N}'}[v(T\cup Q) - x(Q)], & \emptyset \neq T \subsetneq \mathcal{N}' \\ 0, & T = \emptyset \end{cases}$$

Решение σ игры $(\mathcal{N}, v)$ **согласовано** по Дэвису-Машлеру, если для любой коалиции $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$ верно

$$x \in \sigma(\mathcal{N}, v) \Rightarrow x_{\mathcal{N}'} \in \sigma(\mathcal{N}', r^x_{\mathcal{N}'}(v)),$$

где $x_{\mathcal{N}'}$ - вектор без координат, соответствующих игрокам из $\mathcal{N}\backslash\mathcal{N}'$.

Оператор $r^x_{\mathcal{N}'}$ называется **оператором редукции**.

Утверждение. Если $0 \leq x_i \leq B_i$, то оператор редукции действует на $v_{\mathcal{L}}$ транзитивно:

$$\forall\, \mathcal{N}'' \subset \mathcal{N}' \subset \mathcal{N}: \quad r^{x_{\mathcal{N}'}}_{\mathcal{N}''}\left(r^x_{\mathcal{N}'}(v_{\mathcal{L}})\right) = r^x_{\mathcal{N}''}(v_{\mathcal{L}})$$

Теорема. Согласованным одноточечным решением игры, ассоциированной с задачей банкротства со связями является пред-N –ядро.

Обобщенная задача банкротства.

$\mathcal{N}$ – конечное множество игроков, $|\mathcal{N}| > 1$.

$C = \{c_{ij} \geq 0 | i, j \in \mathcal{N}, c_{ii} = 0\}$ – множество долговых связей.

$\mathcal{O} \subset \mathcal{N}$ – множество банкротов: $B_i = E_i + \sum_{p\in\mathcal{N}} c_{pi} - \sum_{p\in\mathcal{N}} c_{ip} < 0 \ \forall i \in \mathcal{O}$.

Для остальных агентов выполнено противоположное неравенство.

Обобщенная проблема банкротства это тройка $(E, C, \mathcal{O})$.

Определим игру на множестве не банкротов $\mathcal{Q} \coloneqq \mathcal{N} \setminus \mathcal{O}$ по прежней схеме: объединяясь в коалицию игроки "захватывают" имущество банкротов, но заботятся о чистых долгах контр-коалиции. После вычислений получаем

$$v_{GBP}(S) \coloneqq \left(\sum_{i\in S} E_i + \sum_{i\in\mathcal{O}} E_i - \sum_{i\in\mathcal{Q}\setminus S} \left(\sum_{k\in\mathcal{O}} c_{ki} + \sum_{k\in\mathcal{Q}} c_{ki} - \sum_{k\in\mathcal{Q}} c_{ik} \right) \right)_+$$

С помощью переобозначений v_{GBP} сводится к $v_{\mathcal{L}}$.

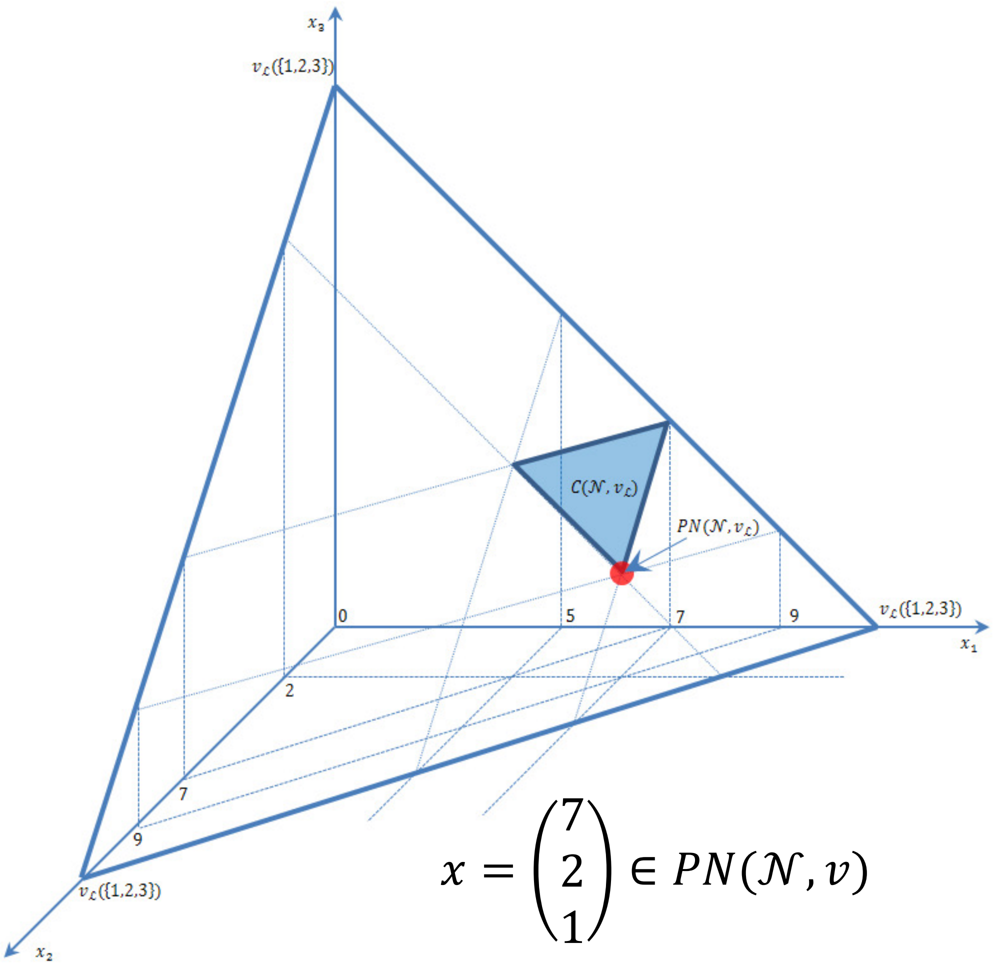
Утверждение. Если множество банкротов пусто, то C –ядро состоит из единственного распределения, где каждый получает свой баланс:

$$\mathcal{O} = \emptyset \Rightarrow C(\mathcal{Q}, v_{GBP}) = (B_i)_{i\in\mathcal{N}}.$$

Вычисление пред-N -ядра

$$(E, c, C) \in \mathcal{L}^3$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 5 & 0 & 9 \\ 8 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$



$$x = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in PN(\mathcal{N}, v)$$

Решив задачу

$$\alpha \to min$$
$$s.t.\ x(S) + \alpha \geq v(S)$$
$$\forall S \subset \mathcal{N}, x \in PI(\mathcal{N}, v)$$

найдем максимальный эксцесс α, множество пред-дележей X_1 и множество коалиций $\mathcal{B}_1$ для которых этот эксцесс достигается.

Если $|X_1| = 1$, то цель достигнута.

Иначе решаем

$$\alpha \to min$$
$$s.t.\ x(S) + \alpha \geq v(S)$$
$$\forall S \subset \mathcal{N} \backslash \mathcal{B}_1, x \in PI(\mathcal{N}, v) \backslash X_1$$

Продолжаем пока минимум не будет достигаться на множестве мощности 1.

Спасибо.

Альтернативное описание поведения коалиции S

Объединяясь в группу агенты по-прежнему суммируют собственные капиталы и “захватывают” деньги банкрота. Из этой суммы они стараются выплатить долги банкрота (иначе кто бы им позволил захватить E_0), а так же рассчитаться по долгам с противоположной коалицией: заплатить всё, что должны агентам извне, но и забрать то, что аутсайдеры должны S. В худшем случае коалиция может получить 0.

Тогда получаем такое **определение $(\mathcal{N}, v_{\mathcal{L}})$**

$$v_{\mathcal{L}} \coloneqq \left(\sum_{i \in S} E_i + E_0 - \left(\sum_{i \in \mathcal{N} \setminus S} c_i + \sum_{i \in S} \sum_{j \in \mathcal{N} \setminus S} c_{ij} - \sum_{i \in S} \sum_{j \in \mathcal{N} \setminus S} c_{ji}\right)\right)_+$$

Важно, что роль тут играют только долговые связи между агентами противоположных коалиций S и $\mathcal{N} \setminus S$.

Если в определении $v_{\mathcal{L}}$ со слайда 7 привести подобные слагаемые, то получаем в точности эту формулу.